අසමානතා හා මාපාංක ශ්‍රිත

(1) i) a සහ b යනු 1 ට වඩා විශාල නම්, එවිට $2(ab+1) > (a+1)(b+1)$ බව පෙන්වන්න.
c සහ d ද 1 ට වඩා විශාල නම්, එවිට $8(abcd+1) > (a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ බව ඒනයින් පෙන්වන්න. (1986)

(2) i) ධන සංඛ්‍යා දෙකක සමාන්තර මධ්‍යන්‍යය ඒවායේ ගුණෝත්තර මධ්‍යන්‍යට වඩා විශාල හෝ සමාන වන බව පෙන්වන්න. ඒ නයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $n > r \geq 0$ නම්, $\frac{(n+1)}{2} \geq \sqrt{(n-r)(r+1)}$ බව සාධනය කරන්න. ඕනෑම $n \geq 1$ නිඛිලයක් සඳහා $(n+1)^n \geq 2^n n!$ බව අපෝහනය කරන්න. (1989)

(3) $x-4 < x(x-4) < 5$ වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.
$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}n(e^x + e^{-x})$ යයි ගනිමු. මෙහි $n\,(>2)$ යනු නියතයකි. $t = e^x$ යැයි ගැනීමෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ,

අ) y හි අඩුතම අගය $\sqrt{n^2-1}$ බව පෙන්වන්න.

ආ) $k > \sqrt{n^2-1}$ නම්, $y = k$ සමීකරණයට t සඳහා තාත්ත්වික මූල දෙකක් පවතින බව පෙන්වා එම මූල සොයන්න.

ඉ) $k = \sqrt{2n(n+1)}$ විට, ඉහත මූල දෙකෙන් වඩා විශාල මූලය $1+\sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ බව පෙන්වා වඩා කුඩා මූලය ලියන්න. ඉහත දැක්වූ අවස්ථාවෙහි දී $y = k$ සමීකරණය සපුරාලන x හි තාත්තිවික අගයන් දෙක $n\,(>2)$ හි කවර අගයක් සඳහා වූව ද $\log_e\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$ සහ $\log_e(\sqrt{2}+1)$ අතර පිහිටන බව අපෝහනය කරන්න.

(1991)

(4) අ) $x, y, \neq 0$ වන පරිදි වූ x, y, λ, μ තාත්ත්වික රාශි $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 2, x+y = \lambda, \frac{y}{x} = \mu$ සම්බන්ධතා මඟින් සැබැඳේ. λ හා μ අතර සම්බන්ධතාවයක් ලබා ගෙන μ තාත්ත්වික වන පරිදි වූ λ හි අගය කුලකය සොයන්න. ඒ නයින්, $\lambda, -3$ විට $\frac{x}{y}$ නිරණය කරන්න.

ආ) x, a ,b > 0, a > b සහ $x^2 >$ ab විට $\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}} > 0$ බව පෙන්වන්න.

ඇ) $|2x-1| < 3x+5$ වන පරිදි වූ x හි අගයන්ගෙන් සමන්විත කුලකය සොයන්න. (1992)

(5) a) $\frac{x^2+9x-20}{x^2-11x+30} \geq -1$ ද $x^2 - 11x + 30 \neq 0$ ද වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න.

b) a,b,c,p,q,r හි සියල්ලම ධන නම්, $\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right)\left(\frac{a}{p}+\frac{b}{q}+\frac{c}{r}\right) \geq 9$ බව පෙන්වන්න.

c) $|5-3x| \geq 2-3x$ වන පරිදි වූ x හි අගය පරාසය සොයන්න. (1993)

(6) a) $x^2 > |5x+6|$ වන පරිදි වූ x හි අගයන් සොයන්න.

b) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ හි සාධක සොයා ඒනයින්, ඕනෑම සෘණ නොවන x,y,z සඳහා $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ බව පෙන්වන්න.ධන p, q, r සඳහා

i) $\frac{1}{3}(p+q+r) \geq \sqrt[3]{pqr}$

ii) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \geq \frac{9}{p+q+r}$ (iii) $\frac{p}{q+r}+\frac{q}{r+p}+\frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(1994)

(7) x සහ k තාත්ත්වික නම්, සියලුම x සඳහා $0 \leq \frac{(x+k)^2}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}(k^2-k+1)$ බව පෙන්වා $\frac{(x+2)^2}{x^2+x+1}$ ප්‍රකාශනය එහි කුඩාතම හා විශාලතම අගයන් ගන්නා x හි අගයන් ලබාගන්න. (1994)

(8) i) $7-x \geq 2|x^2-4|$ තෘප්ත කරන්නා වූ x හි අගයන් සොයන්න.

ii) ඕනෑම ධන x සඳහා $x+\frac{1}{x} \geq 2$ බව පෙන්වන්න. a, b හා c යනු ධන සංඛ්‍යා වේ. ඉහත ප්‍රතිඵලය උපයෝගී කර ගනිමින් $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ බව පෙන්වන්න. a + b + c = 1 නම් 2 – a , 2 - b හා , 2 – c ධන බව පෙන්වා $\frac{a}{2-a}+\frac{b}{2-b}+\frac{c}{2-c} \geq \frac{3}{5}$ බව අපෝහනය කරන්න.

iii) $2x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 8y + 15 = 0$ නම්, $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ හා $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$ අතර x පැවතිය නොහැකි බවද 1 හා 3 අතර y පැවතිය නොහැකි බව ද පෙන්වන්න. මෙහි x හා y තාත්වික වේ. (1995)

(9) i) a, b, z, x සියල්ල ධන ද $z \geq x$ ද විට $x^2y = az + bz^3$ නම්, එවිට $y \geq 2\sqrt{ab}$ බව සාධනය කරන්න.

ii) $|3x-4| > 2-5x$ වන x හි අගය කුලකය සොයන්න. (1996)

(10) i) $(\alpha) x^3+3x^2 < x+3$

$(\beta) |x+2|+|x-3| < 7$

ඉහත සඳහන් එක් එක් අසමානතාව සඳහා එය තෘප්ත කරන x හි අගයන් කුලකය සොයන්න.

ii) එකම රූ සටහනෙහි $y = x^2 - 4x + 3$ සහ $x^2 + y^2 = 4$ වක්‍රවල දළ රූ සටහන් ඇඳ $y \leq x^2-4x+3$ සහ $x^2 + y^2 \leq 4$ අසමානතා දෙකම සපුරාලන පෙදෙස් අඳුරු කරන්න.

(1997)

(11) ඇ) i) $\frac{x}{x-1} < \frac{x}{x-2}$ වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

ii) එකම රූප සටහනක $y = 3 - |x+2|$ සහ $y = |2x - 3x^2 + x^3|$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රවල කටු සටහන් අඳින්න. $3 - |x+2| \geq y \geq |2x - 3x^2 + x^3|$ අසමානතාවයන් තෘප්ත වන පෙදෙස අඳුරු කරන්න.

ආ) සියලු තාත්වික x සඳහා $x^2 + 2x + 3 > 0$ බව පෙන්වීමට "විසංවාදයක් මගින් සාධනය" භාවිත කරන්න. (1998)

(12) $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| > 4$ අසමානතාව විසඳන්න. (1999)

(13) $y = 2|x+1| - 3$ සහ $y = x + 2|x-1|$ හි ප්‍රස්තාර එකම සටහනක අඳින්න.
ඒ නයින්, $x + 2|x-1| > 2|x+1| - 3$ සපුරාලනු ලබන x හි අගය කුලකය සොයන්න.
$x + 2|x-1| = 2|x+1| - 3$ සමීකරණය විසඳන්න. (2001)

(14) $|x+2| + |x-1| > 5$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලුම තාත්වික අගයන්ගෙන් සමන්විත කුලකය සොයන්න. (2003)

(15) $|x-1| - \left|\frac{1}{2}x + 1\right| < 1$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්වික අගයයන්ගේ කුලකය සායන්න. විසඳුම් කුලකයේ වැඩිතම නිඛිලමය අගය අපෝහනය කරන්න. (2004)

(16) $y = |2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න. ඒ නයින්, $y = -|2x - 8|$ හි ප්‍රස්තාරය අඳින්න.
$y = 4 - |2x - 8|$ හා $y = |2x - 10|$ හි ප්‍රස්තාරය **එකම රූප සටහනක** අඳින්න.
ඒ නයින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ $|2x - 10| + |2x - 8| \leq 4$ අසමානතාව සපුරාලනු x හි තාත්වික අගය කුලකය සොයන්න. (2011)

(17) a) $f(x) \equiv x^2 + 2kx + k + 2$ යැයි ගනිමු. මෙහි k යනු තාත්වික නියතයකි.

i) $f(x)$ යන්න $(x - a)^2 + b$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a හා b යනු k ඇසුරෙන් නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි. කලනය භාවිතයෙන් තොරව $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සොයා මෙම ලක්ෂ්‍යය අවමයක් බව පෙන්වන්න. $f(x)$ හි අවම අගය k ඇසුරෙන් සොයන්න. ඒ නයින්, $y = f(x)$ වක්‍රය

(α) $-1 < k < 2$ නම්, x – අක්ෂයට ඉහළින් මුළුමනින්ම පිහිටන බව,

(β) $k = -1$ හෝ $k = 2$ හෝ නම්, x – අක්ෂය ස්පර්ශ කරන බව,

(γ) $k < -1$ හෝ $k > 2$ හෝ නම්, x – අක්ෂය ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී කපන බව පෙන්වන්න.

ii) $k < -2$ ම නම් පමණක් m හි සියලු තාත්වික හා පරිමිත අගයන් සඳහා $y = mx$ සරල රේඛාව $y = f(x)$ වක්‍රය තාත්වික හා ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය දෙකක දී ඡේදනය කරන බව සාධනය කරන්න. (2012)

(18) $g(x) \equiv x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ යැයි ගනිමු. ශේෂ ප්‍රමේයය නැවත නැවත යොදාගනිමින් $(x-1)^2$ යන්න $g(x)$ හි සාධකයක් බව පෙන්වන්න. $g(x)$ යන්න $(x-a)^2(x^2 + bx + c)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි a,b හා c යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වෙයි. x හි සියලු තාත්වික අගයන් සඳහා $g(x) \geq 0$ බව අපෝහනය කරන්න. (2012)

(19) එකම රූපයක $y = |2x - 1|$ හා $y = |x| + \frac{5}{3}$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.
ඒ නයින්, $3|x| \geq |6x - 3| - 5$ සඳහා වන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

වර්ග සමීකරණ

(1) a, b, c තාත්ත්වික වූ $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ ප්‍රකාශනය හැමවිට ම $f(x) \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව සාධනය කරන්න. මෙහි α, β යනු එක්කෝ

i) දෙකම තාත්ත්වික, නැතිනම්

ii) දෙකම සංකීර්ණ සංඛ්‍යායි.

a යනු ධන නියතයක් යැයි සලකා ඉහත අවස්ථා දෙක විදහා පෑම සඳහා ප්‍රස්තාර අඳින්න. a යනු සෘණ නියතයක් වූ විට මේ ප්‍රස්තාර වල ඇති වන වෙනස කුමක් ද? $x = 5$ වන විට $f(x) > 0$ $x = q\ (q > p)$ වන විට $f(x) < 0$ ද නම් $f(x) = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව ද ඉන් එකම එකක් පමණක් p හා q ත් අතර පිහිටන බව ද ඉහත සැලකූ ප්‍රස්තාර මගින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ පෙන්වන්න. $x^2 + b_1 x + c_1 = 0$ ද $x^2 + b_2 x + c_2 = 0$ ද සමීකරණ දෙකෙහි මූල පිළිවෙලින් α_1, β_1 ද α_2, β_2 ද වෙයි. $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta_1 < \beta_2$ නම්, $f(x) \equiv 2x^2 + (b_1 + b_2)x + c_1 + c_2 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල දෙකක් ඇති බව පෙන්වන්න.

(1977)

(2) i) $ax^2 + a^2x + 1 = 0$ ද $bx^2 + b^2x + 1 = 0$ ද යන සමීකරණවලට පොදු මූලයක් තිබෙයි නම්, ඒවායේ අනෙක් මූලවලින් $abx^2 + x + a^2b^2 = 0$ වර්ගජ සමීකරණය සපිරෙන බව පෙන්වන්න.

ii) X තාත්ත්වික නම් $\dfrac{x^2+2x-1}{2x-1}$ ප්‍රකාශනයට 1ත් 2ත් අතර තාත්ත්වික අගයන් තිබිය නොහැකි බව පෙන්වන්න.

(1978)

(3) a, b, c යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා ද $a \neq 0$ ද විට $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$ වෙයි නම් p, q, r යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වන පරිදි වූ $a[(x-p)^2 + q^2]$ හෝ $a[(x-p)^2 - r^2]$ හෝ ලෙස $f(x)$ ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. අවස්ථා දෙක අතර වෙනස පැහැදිලි කරන්න. $b^2 - 4ac = 0$ විට කිමෙක් වන්නේ ද?